

**Problème 1.** (*Il est recommandé de faire une figure.*) Soient  $A, B, C$  les points du plan de coordonnées  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$  et  $(1, \sqrt{3})$  respectivement.

- Déterminer une équation pour la droite qui passe par  $A$  et  $C$  et une équation pour celle qui passe par  $B$  et  $C$ . Vérifier que les deux droites sont orthogonales.
- Déterminer l'amplitude des angles  $\widehat{BAC}$  et  $\widehat{ABC}$ .
- Déterminer une équation du cercle  $\Gamma$  ayant pour diamètre le segment  $AC$ .

Soit  $H$  le pied de la hauteur du triangle  $ABC$  issue de  $C$ .

- Quelles sont les coordonnées de  $H$ ?
- Vérifier que  $H$  appartient au cercle  $\Gamma$ .

Soit  $M$  le milieu du segment  $AB$ .

- Déterminer une équation pour la droite  $CM$  et une pour la bissectrice de l'angle  $\widehat{BAC}$ .
- Déterminer les coordonnées du point  $P$  d'intersection entre ces deux droites.
- Vérifier que  $P$  appartient au cercle  $\Gamma$ .

**Problème 2.** On considère l'équation  $z^5 = 1$ .

1. Combien de solutions a-t-elle dans l'ensemble  $\mathbb{C}$ ? Combien d'entre elles sont réelles?
2. Que vaut le module des solutions? Faire un dessin qui représente les solutions dans le plan complexe.
3. Montrer que, si  $\zeta$  est tel que  $\zeta^5 = 1$ , alors  $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$  et  $\bar{\zeta} = \zeta^4$ .
4. Vérifier l'identité de polynômes  $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ ; en déduire que l'ensemble des solutions de l'équation  $z^5 = 1$  consiste en le nombre réel 1 et les solutions de l'équation  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ .
5. Montrer que, si  $\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0$ , alors  $(\zeta + \bar{\zeta})^2 + \zeta + \bar{\zeta} - 1 = 0$ . (*On pourra utiliser les résultats des points 3 et 4.*)
6. En déduire que la partie réelle  $x$  d'une solution  $\zeta \neq 1$  de l'équation  $z^5 = 1$  satisfait l'équation  $4x^2 + 2x - 1 = 0$ . Trouver les valeurs possibles pour  $x$ .
7. ★ Calculer les valeurs possibles pour le module  $|1 - \zeta|$ . En déduire la longueur du côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité.