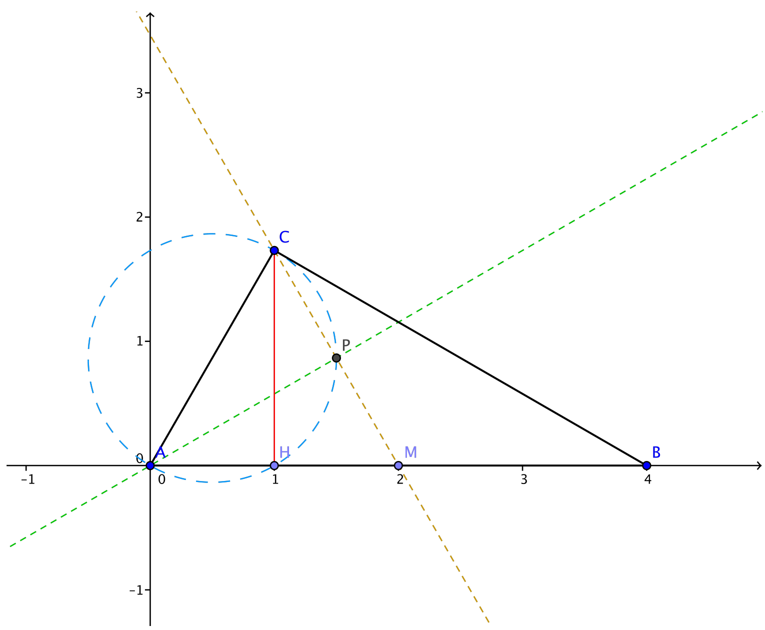
Corrigé du Contrôle 1 – module Algèbre et Géométrie

1 Problème 1



— On sait qu'une équation de la droite passant par deux points de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est donnée par

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1).$$

Dans notre cas on peut prendre $(x_1, y_1) = A = (0, 0)$ et $(x_2, y_2) = C = (1, \sqrt{3})$, ce qui donne

$$(1 - 0)(y - 0) = (\sqrt{3} - 0)(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3}x}$$

pour la droite AC. On prend ensuite $(x_1, y_1) = B = (4, 0)$ et $(x_2, y_2) = C = (1, \sqrt{3})$ et l'on trouve

$$(1 - 4)(y - 0) = (\sqrt{3} - 0)(x - 4) \Rightarrow -3y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\sqrt{3}x + 3y - 4\sqrt{3} = 0}$$

pour la droite BC. On peut réécrire cette dernière équations sous la forme

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}; \tag{1}$$

on constate ainsi que la pente (ou coefficient angulaire) de la droite AC est donnée par $\sqrt{3}$ (coefficient de x dans l'équation $y = \sqrt{3}x$), alors que celle de la droite BC est $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (coefficient de x dans l'équation (1)). Comme le produit de ces deux nombres est

$$\sqrt{3} \times \frac{-\sqrt{3}}{3} = \frac{-\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{3} = -1$$

les deux droites sont bien orthogonales.

— On utilise la formule

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = ||\vec{AC}|| \, ||\vec{AB}|| \cos \widehat{BAC},$$

où $\vec{AC} = (1, \sqrt{3})$ est le vecteur qui va de A vers C (et pareillement pour $\vec{AB} = (4, 0)$). On calcule aisement $||\vec{AC}|| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ et $||\vec{AB}|| = 4$ (remarquer que B est un point de l'axe des abscisses ! La valeur absolue de sa coordonnée x est donc sa distance de l'origine). On calcul ensuite $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 1 \cdot 4 + \sqrt{3} \cdot 0 = 4$, d'où

$$4 = \vec{AC} \cdot \vec{AB} = ||\vec{AC}|| \, ||\vec{AB}|| \cos \widehat{BAC} = 2 \cdot 4 \cdot \cos \widehat{BAC}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

On en déduit $\widehat{BAC} = \pm 60° = \pm\frac{\pi}{3}$, et comme l'angle d'un triangle ne peut pas dépasser π on a forcément $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ (il suffit d'ailleurs de regarder le dessin !).

Remarque : si on avait calculé $\vec{AC} \cdot \vec{BA}$ au lieu de $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$ on aurait trouvé $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Cela correspond au fait que l'angle entre la droite AC et le prolongement du côté AB de la part de A forment un angle de 120°.

Finalement, pour déterminer l'angle $\widehat{ABC}$ il suffit de se rappeler que la somme des angles d'un triangle vaut π, d'où

$$\boxed{\widehat{ABC} = \pi - \widehat{BAC} - \widehat{ACB} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6},}$$

où l'on a utilisé la première question pour la valeur de $\widehat{ACB} = \pi/2$. On pourrait également calculer $\widehat{ABC}$ directement : comme toute à l'heure on trouve $\vec{BA} = (-4, 0)$, $\vec{BC} = (1, \sqrt{3}) - (4, 0) = (-3, \sqrt{3})$, puis $||\vec{BA}|| = 4$, $||\vec{BC}|| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, et finalement

$$12 = \vec{BA} \cdot \vec{BC} = ||\vec{BA}|| ||\vec{BC}|| \cos \widehat{ABC} = 8\sqrt{3} \cos \widehat{ABC},$$

d'où

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{12}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}.$$

— Par définition, le centre de Γ est le point du milieu du segment AC, à savoir le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Le rayon r de Γ est moitié de la longeuer de AC, qu'on a déjà établi être 2 (donc $r = 1$). On en déduit qu'une équation de Γ est donnée par

$$\boxed{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1^2}$$

— Le point H est la projection de $C = (1, \sqrt{3})$ sur l'axe des abscisses. Donc par définition la coordonnée y de H est nulle, alors que sa coordonnée x est égale à la coordonnée x de C. Donc $H = (1, 0)$.

— Pour vérifier si H appartient à Γ on remplace les coordonnées de H dans l'équation de Γ, et on vérifie si l'on obtient une idéntité ou pas. On trouve la formule

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1^2,$$

que l'on vérifie aisement être vraie (en effet $(1 - 1/2)^2 = 1/4$ et $\left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3/4$). Donc H appartient bien à Γ.

— Le point M a coordonnées $(2, 0)$. Pour trouver une équation de la droite CM on procède comme dans la première question ; on obtient

$$\boxed{y = -\sqrt{3}(x - 2)}$$

Pour la bissectrice $\mathcal{L}$ de l'angle $\widehat{BAC}$, on remarque que l'on a $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, donc la bissectrice $\mathcal{L}$ est une droite passant par l'origine qui forme un angle $\frac{1}{2}\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ avec l'axe des abscisses : son équation est donc $\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{3}x}$. Rappelons ici que le coefficient angulaire d'une droite est la tangente de l'angle que cette droite forme avec l'axe x ; remarquons aussi que $\tan(\pi/6) = \dfrac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

— Pour déterminer les coordonnées de P nous n'avons qu'à résoudre le système

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x & \text{(bissectrice)} \\ y = -\sqrt{3}(x - 2) \end{cases}$$

En remplaçant la première équation dans la deuxième on trouve

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x = -\sqrt{3}(x - 2) \Rightarrow x = -3(x - 2) \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = 3/2,$$

et en utilisant à nouveau la première équation on obtient $y = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Les coordonnées de P sont donc

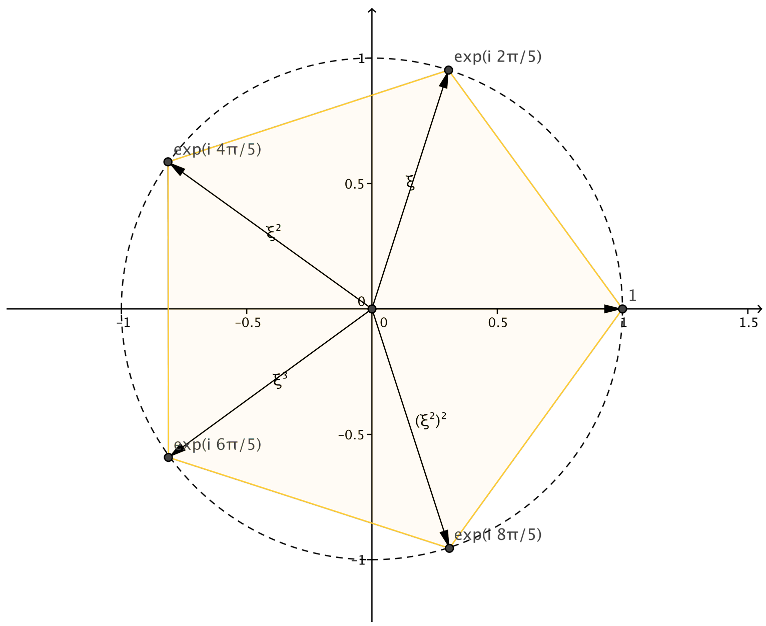
$$\boxed{P = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

— On reprend l'équation de Γ et on remplace les coordonnées de P : on obtient

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1,$$

qui est bien une idéntité. On en déduit que P appartient à Γ.

2 Problème 2



1. Toute équation de degré 5 admet 5 solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes (donc en particulier cela est vrai pour l'équation $z^5 = 1$). Par contre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels tout nombre admet précisement une racine cinquième, donc l'équation $z^5 = 1$ admet exactement une solution réelle ($z = 1$). Pour montrer qu'il n'y a qu'une solution réelle on peut aussi constater que $z = 1$ est bien une solution, puis remarquer que pour $z > 1$ on a $z^5 > 1$ et pour $z < 1$ on a $z^5 < 1$, donc il n'y a pas d'autre solution réelle.
2. Ecrivons z sous la forme exponentielle : $z = \rho e^{i\theta}$. L'équation proposée dévient alors $\rho^5 e^{5i\theta} = 1$. Or le module du nombre complexe $\rho^5 e^{5i\theta}$ est ρ^5, et le module de 1 est bien sûr 1. On en déduit $\rho^5 = 1$ avec ρ nombre réel, donc $\rho = 1$: toute solution de l'équation $z^5 = 1$ est de module 1. On a alors $e^{5i\theta} = 1$, ce qui implique que l'argument du nombre complexe $e^{5i\theta}$ est un multiple entier de 2π : on obtient ainsi
$$5\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{5}$$
Les solutions de l'équation $z^5 = 1$ sont donc les 5 nombres complexes
$$\boxed{\begin{gathered} e^0 = 1,\ e^{2i\pi/5} = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5),\ e^{4i\pi/5} = \cos(4\pi/5) + i\sin(4\pi/5), \\ e^{6i\pi/5} = \cos(6\pi/5) + i\sin(6\pi/5),\ e^{8i\pi/5} = \cos(8\pi/5) + i\sin(8\pi/5) \end{gathered}}$$
Voici un dessin de ces solutions dans le plan complexe :
3. On a déjà montré que toute solution ζ de l'équation $z^5 = 1$ satisfait à $|\zeta| = 1$. On en déduit $\zeta\overline{\zeta} = |\zeta|^2 = 1$, d'où $\overline{\zeta} = 1/\zeta$. De plus, si $\zeta^5 = 1$, alors en divisant par ζ les deux côtés on trouve $\zeta^4 = 1/\zeta = \overline{\zeta}$.
On peut aussi montrer ces propriétés directement à partir de l'expression explicite des solutions : si $\zeta = e^{2k\pi i/5} = \cos(2k\pi/5) + i\sin(2k\pi/5)$ alors
$$\overline{\zeta} = \cos(2k\pi/5) - i\sin(2k\pi/5) = e^{-2k\pi i/5} = \frac{1}{\zeta};$$

de façon similaire on a $\zeta^4 = e^{8k\pi i/5}$ et $\overline{\zeta} = e^{-2k\pi i/5}$, et ces deux nombres sont égaux car leur rapport est

$$\frac{\overline{\zeta}}{\zeta^4} = e^{-2k\pi i/5 - 8k\pi i/5} = e^{-10k\pi i/5} = e^{-2k\pi i} = 1.$$

4. On a bien

$$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = z^5+z^4+z^3+z^2+z-z^4-z^3-z^2-z-1 = z^5-1.$$

Ainsi $z^5 - 1 = 0$ est équivalent à $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = 0$, et comme un produit de deux nombres complexes est nul si et seulement si l'un de deux facteurs l'est on en déduit que on a $z^5 - 1$ si et seulement si $z = 1$ ou bien z est une solution de l'équation $z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$.

5. Soit ζ un nombre complexe tel que $\zeta^4+\zeta^3+\zeta^2+\zeta+1 = 0$. En développant l'expression $(\zeta+\overline{\zeta})^2+\zeta+\overline{\zeta}-1$ on trouve

$$\zeta^2+\overline{\zeta}^2+2\zeta\overline{\zeta}+\zeta+\overline{\zeta}-1;$$

or on a $\zeta\overline{\zeta} = 1$ et $\overline{\zeta} = \zeta^4$ d'après la question 3, donc l'expression ci-dessus est égale à

$$\begin{aligned}\zeta^2+(\zeta^4)^2+2+\zeta+\zeta^4-1 &= \zeta^4+\zeta^8+\zeta^2+\zeta+1\\ &= \zeta^4+\zeta^5\cdot\zeta^3+\zeta^2+\zeta+1.\end{aligned}$$

Finalement, on sait d'après la question précédente que un nombre complexe ζ qui satisfait à $\zeta^4+\zeta^3+\zeta^2+\zeta+1 = 0$ est aussi une solution de l'équation $\zeta^5 = 1$, donc dans la formule ci-dessus on peut remplacer ζ^5 par 1 pour obtenir

$$\zeta^4+\zeta^5\cdot\zeta^3+\zeta^2+\zeta+1 = \zeta^4+\zeta^3+\zeta^2+\zeta+1 = 0,$$

où la dernière égalité est vraie par hypothèse.

6. Ecrivons $\zeta = x+iy$ et $\overline{\zeta} = x-iy$. D'après la question précédente, on a

$$(\zeta+\overline{\zeta})^2+\zeta+\overline{\zeta}-1 = 0;$$

en remplaçant $\zeta, \overline{\zeta}$ par $x+iy, x-iy$ respectivement on obtient

$$(x+iy+x-iy)^2+(x+iy)+(x-iy)-1 = 0 \Rightarrow (2x)^2+2x-1 = 0 \Rightarrow \boxed{4x^2+2x-1 = 0}$$

Les solutions de cette dernière équation sont données par

$$x = \frac{-2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot4\cdot(-1)}}{2\cdot4} = \frac{-2\pm\sqrt{20}}{8} = \frac{-2\pm2\sqrt{5}}{8} = \boxed{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}}$$

7. En utilisant les questions précédentes on a (rappelons que x dénote la partie réelle de ζ)

$$|1-\zeta|^2 = (1-\zeta)(1-\overline{\zeta}) = 1-\zeta-\overline{\zeta}+\zeta\overline{\zeta} = 1-2x+1 = 2-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} = \frac{3\mp\sqrt{5}}{2}$$

On peut reconnaître que $\frac{3\mp\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}\mp 1}{2}\right)^2$, d'où $|1-\zeta|$ peut prendre les deux valeurs

$$\boxed{\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}}$$

Ces deux valeurs correspondent à la longueur du côté et de la diagonale d'un pentagone inscrit dans le cercle unité (rappelons que les nombres complexes ζ tels que $\zeta^5 = 1$ forment un pentagone régulier avec un sommet en $z = 1$, et que le module d'un nombre complexe est sa longeueur). Comme la diagonale d'un pentagone est plus longue du côté, on en déduit que la longueur du côté est $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et la longueur de la diagonale est $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.