Exercices d'algèbre linéaire: applications linéaires, noyau, image

Exercice 1 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que*

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

1. *Quelle est la dimension de* $\ker f$ *? Et de l'image de* f *?*
2. *Déterminer une base de* $\ker f$.
3. *Calculer* $f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 2 *Montrer qu'il n'existe aucune application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que*

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Exercice 3 *Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Montrer que la dimension de* $\ker f$ *est au moins égale à 2. Donner un exemple où la dimension est exactement 2, exactement 3, exactement 4.*

Exercice 4 *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $f : V \to V$ une application linéaire telle que $f \circ f = f$ (à savoir, pour tout $v \in V$ on a $f(f(v)) = f(v)$). Montrer que $V = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.*

Indication : on pourra écrire $v = f(v) + (v - f(v))$.

Exercice 5

1. *Montrer qu'il n'existe aucune application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que* $\ker f = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.
2. *Montrer qu'il existe une **unique** application linéaire $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que* $\ker h = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ *et $h\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = 1$. Déterminer 3 nombres réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $h\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = ax + by + cz$.*

Exercice 6 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que*

$$f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que

$$g\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que f et g sont surjectives (c'est à dire $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g = \mathbb{R}^2$).*
2. *Montrer que f et g sont injectives.*
3. *Calculer $g \circ f \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$*

Exercice 7 *Soient V_1, V_2, V_3 trois espace vectoriels réels, et soient $f : V_2 \to V_3$ et $g : V_1 \to V_2$ deux applications linéaires.*

- *Montrer que si f et g sont injectives, alors il en va de même pour $f \circ g$.*
- *Montrer que $f \circ g$ peut être injective même si f n'est pas injective.*