Nombres complexes

12 novembre 2015

Problème 1. Quelles sont les solutions (réelles ou complexes) de l'équation $z^3 - 3z^2 + 3z - 2 = 0$? Quels sont leurs modules ?

Problème 2. Déterminer un polynôme à coefficients réels dont le nombre complexe $2 - 3i$ soit une racine.

Problème 3. On fait une rotation de 60° autour de l'origine ; quelle est l'image du point de coordonnées $(2, 5)$? Et si la rotation était de 30° ?

Problème 4. Déterminer les coordonnées des sommets d'un hexagone régulier, sachant que l'un des sommets a coordonnées $(1, -2)$ et que le centre de l'hexagone est l'origine des axes.

Problème 5. Calculer la valeur de l'expression $(1 + \sqrt{3}i)^{10}$.

Problème 6. Calculer la valeur de l'integrale $\int_0^{\pi/2} cos^3 t \, \mathrm{d}t$.

Problème 7. Résoudre les équations suivantes (dans l'ensemble des nombres complexes) :
— $z + 2\overline{z} - 3 = 0$
— $z^3 = |z|$
— $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$
— $z^2 = 6 + |z|$
— $z^5 = \overline{z}$

Problème 8. Montrer que, si $z \neq 0$ est un nombre complexe, $z + \frac{1}{z}$ est un nombre réel si et seulement si z est réel ou $|z| = 1$.

Problème 9. Un entier positif k est *somme de deux carrés* s'il existent $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a^2 + b^2 = k$. Montrer que, si n et m sont sommes de deux carrés, alors il en va de même pour leur produit mn. Donner une écriture de 85 comme somme de deux carrés.

Problème 10. Soit ABC un triangle quelconque ; on considère les centres P_A, P_B, P_C des trois triangles équilatères construits sur les côtés BC, AC, AB à l'extérieur du triangle ABC. Montrer que le triangle $P_AP_BP_C$ est équilatère.