Espaces vectoriels réels

24 novembre 2015

Problème 1. Montrer que, si v, w sont des vecteurs dans un espace vectoriel réel V, $\mathrm{Vect}(v, w) = \mathrm{Vect}(v + w, v - w)$.

Problème 2. Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, on considère les solutions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ du système suivant :

$$\begin{cases} x + y - 2z - w = 0 \\ -x + y + z + w = 0 \\ ax + 4y + z + 2w = 0 \end{cases}$$

en fonction du *paramètre* a, exhiber une base de l'espace ; déterminer les valeurs possibles pour sa dimension.

Problème 3. Soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ avec a, b, c non nuls ; montrer que la famille de vecteurs

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ f \\ c \end{pmatrix}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

Problème 4. Montrer que, si l'on choisi n'importe quel couple de vecteurs parmi les 3 suivants, on obtient une famille *libre*. Montrer que par contre les 3 vecteurs sont liés.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Problème 5. Étant donnés deux sous-espaces V et W d'un espace vectoriel E, et deux familles de vecteurs $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ telles que $\mathcal{F}_1$ est une base de V et $\mathcal{F}_2$ une base de W, montrer que $V \cap W = \{0\}$ si et seulement si la famille $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est libre.

Problème 6. Montrer que l'intersection entre un sous-espace de dimension 5 et un sous-espace de dimension 7 inclus dans $\mathbb{R}^{10}$ a dimension au moins 2.

Problème 7. On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soient $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $W = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$. Déterminer une base de $V \cap W$. Quelle est la dimension de l'espace engendré par V et W ?