81. Grazie al teorema della funzione implicita, a meno di riordinare le variabili, possiamo assumere che in un intorno di x_0 l'insieme E_a sia della forma $\{(u, g(u)) \mid u \in U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\}$, dove $g : U \to \mathbb{R}$ (con U un aperto di $\mathbb{R}^{n-1}$) è di classe C^2 e ha derivate che soddisfano

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = -\frac{\partial \phi / \partial x^i}{\partial \phi / \partial x^n}.$$

per $i = 1, \ldots, n-1$. Supponiamo inoltre che si abbia $x_0 = (u_0, g(u_0))$, dove x_0 è tale che $f(x_0) = \min_{x \in E_a} f(x)$. Deve allora valere

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(x, g(x))|_{x=u_0} = 0$$

per $i = 1, \ldots, n-1$; ma

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(x, g(x)) = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial \phi / \partial x^i}{\partial \phi / \partial x^n}.$$

Ponendo $-\lambda = \frac{\partial f / \partial x^n (x_0)}{\partial \phi / \partial x^n (x_0)}$, si ottiene in effetti che $\nabla f(x_0) + \lambda \nabla \phi(x_0) = 0$: in effetti perché

$$\frac{\partial f}{\partial x^n} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^n} = \frac{\partial f}{\partial x^n} - \frac{\partial f / \partial x^n}{\partial \phi / \partial x^n}\frac{\partial \phi}{\partial x^n} = 0.$$

82. Grazie al teorema della funzione implicita, assumiamo la notazione costruita in precedenza: a meno di riordinare le variabili, un intorno di x_0 nell'insieme E_a è della forma $\{(u, g(u)) \mid u \in U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\}$, con g di classe C^2 le cui derivate sono come sopra.

Supponiamo inoltre che si abbia $x_0 = (u_0, g(u_0))$.

Dal momento che $\frac{\partial \phi}{\partial x^n}(x_0) \neq 0$, ogni vettore v di $\mathbb{R}^n$ che soddisfi

$$\nabla \phi(x_0) \cdot v = 0$$

si scrive nella forma $v = (v^1, \ldots, v^{n-1}, v^n)$, dove la coordinata v^n è determinata in funzione delle precedenti dall'equazione

$$v^n = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^n}(x_0)\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(x_0) v^i \tag{1}$$

Chiamiamo w il vettore di $\mathbb{R}^{n-1}$ di coordinate $(v^1, \ldots, v^{n-1})$. Consideriamo la funzione di una variabile reale t data da

$$F(t) := f(u_0 + tw, g(u_0 + tw)).$$

Per $|t|$ sufficientemente piccolo, il vettore $u_0 + tw$ appartiene all'aperto U, e quindi la funzione F è effettivamente definita su un qualche intorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$ di $0 \in \mathbb{R}$. Siccome per ipotesi f ha un punto di minimo in x_0, la funzione F assume minimo in $t = 0$. Si osservi inoltre che F, essendo composizione di funzioni di classe almeno C^2, è essa stessa di classe almeno C^2. Quanto noto sullo studio di massimi e minimi (non vincolati) in una variabile ci dice che $\frac{d^2 F}{dt^2}|_{t=0} \geq 0$. Esprimiamo adesso questa derivata seconda. Calcoliamo innanzitutto la derivata prima usando le regole per la derivazione di funzioni composte (si osservi che F è una funzione reale di variabile reale, scritta però come composizione di una funzione da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}^n$ e di una da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}$):

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^i}(u_0 + tw, g(u_0 + tw)) v^i + \frac{\partial f}{\partial x^n}(u_0 + tw, g(u_0 + tw)) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x^i}(u_0 + tw) v^i.$$

Possiamo ora calcolare la derivata seconda in $t = 0$, che scriveremo come la somma dei seguenti 5 contributi:

$$A_1 := \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(u_0, g(u_0)) v^i v^j$$

$$A_2 := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^i}(u_0, g(u_0)) v^i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x^j}(u_0) v^j$$

$$B_1 := \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^n}(u_0, g(u_0)) v^j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^i}(u_0) v^i$$

$$B_2 := \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^n}(u_0, g(u_0)) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x^j}(u_0) v^j \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x^i}(u_0) v^i$$

$$C := \frac{\partial f}{\partial x^n}(u_0, g(u_0)) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^j \partial x^i}(u_0) v^i v^j.$$

È ora utile osservare che l'equazione (1) fornisce

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x^j}(u_0) v^j = -\sum_{j}^{n-1} \frac{\partial \phi / \partial x^j (x_0)}{\partial \phi / \partial x^n (x_0)} v^j = -\frac{1}{\partial \phi / \partial x^n (x_0)} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}(x_0) v^j = v^n. \tag{2}$$

Da questa uguaglianza otteniamo allora

$$A_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^i}(u_0, g(u_0)) v^i v^n$$

$$B_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^n}(u_0, g(u_0)) v^j v^n = A_2$$

$$B_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^n}(u_0, g(u_0)) v^n v^n.$$

Si noti in particolare che $A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = {}^t v \cdot (Hf) v$. Si tratta ora di manipolare C per mostrare che questa quantità coincide con ${}^t v \cdot H(\lambda\phi) v$.

A tal fine osserviamo che in un intorno di u_0 vale

$$\frac{\partial g}{\partial x^i}(u) = -\frac{\partial \phi / \partial x^i}{\partial \phi / \partial x^n}(u, g(u))$$

e quindi, derivando ulteriormente (e valutando in u_0), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^j \partial x^i}(u_0) = &- \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^n}(x_0) \right)^{-2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) \frac{\partial \phi}{\partial x^n}(x_0) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^n \partial x^j} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(x_0) \right) \\ &- \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^n}(x_0) \right)^{-2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^n \partial x^i}(x_0) \frac{\partial \phi}{\partial x^n}(x_0) - \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x^n}(x_0) \right) \frac{\partial g}{\partial x^j}(u_0). \end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione di C e ricordando che $\lambda = -\frac{\partial f / \partial x^n (x_0)}{\partial \phi / \partial x^n (x_0)}$ otteniamo

$$\begin{aligned} C = &\frac{\lambda}{\partial \phi / \partial x^n (x_0)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) \frac{\partial \phi}{\partial x^n}(x_0) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^n \partial x^j} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(x_0) \right) v^i v^j \\ &+ \frac{\lambda}{\partial \phi / \partial x^n (x_0)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^n \partial x^i}(x_0) \frac{\partial \phi}{\partial x^n}(x_0) - \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x^n}(x_0) \right) \frac{\partial g}{\partial x^j}(u_0) v^i v^j \\ = &\lambda \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) v^i v^j + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^n \partial x^j} v^j \left(-\frac{1}{\partial \phi / \partial x^n (x_0)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(x_0) v^i \right) \\ &+ \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^n \partial x^i}(x_0) \frac{\partial g}{\partial x^j}(u_0) v^i v^j + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x^n}(x_0) \left(-\frac{1}{\partial \phi / \partial x^n (x_0)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}(x_0) v^i \right) \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x^j}(u_0) v^j \right). \end{aligned}$$

Usando nuovamente le equazioni (1) e (2) possiamo sostituire ciascuna delle espressioni fra parentesi con v^n, ottenendo finalmente

$$C = \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) v^i v^j = {}^t v \cdot H(\lambda\phi) v.$$